Topologia
Lista 3 (przestrzenie metryczne, zbieżność)

Zad 1. Sprawdzić, czy funkcja $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest metryką na $\mathbb{R}$, gdzie

$$a)\ d(x,y) = |x| + |y|, \qquad b)\ d(x,y) = |x| \cdot |y|, \qquad c)\ d(x,y) = |x-y|^2.$$

Zad 2. Dla jakich odwzorowań $f : X \to \mathbb{R}$ funkcja $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dana wzorem $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ jest metryka w X?

Zad 3. Sprawdzić, czy funkcja $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dana wzorem $d(m,n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$, $m, n \in \mathbb{N}$, jest metryką w $\mathbb{N}$. Jeśli tak, to jak wyglądają kule $K_1(1)$, $K_{\frac{1}{2}}(1)$ oraz $K_{\frac{1}{2}}(3)$ w tej metryce.

Zad 4. Pokazać, że jeśli (X,d) jest przestrzenią metryczną, to metrykami są również funkcje

$$d_1(x,y) = a \cdot d(x,y),\ a > 0, \qquad d_2(x,y) = \min\{d(x,y), 1\}, \qquad d_3(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}.$$

Pokazać, że metryki te wprowadzają na X tą samą rodzinę zbiorów otwartych, co wyjściowa metryka d.

Zad 5. Uzasadnić, że następujące funkcje na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ są metrykami:

$$d_e(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2} \qquad (\textit{metryka euklidesowa}),$$
$$d_t(x,y) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2| \qquad (\textit{metryka taksówkowa}),$$
$$d_m(x,y) = \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\} \qquad (\textit{metryka maximum}),$$
$$d_w(x,y) = \sqrt{|x_1-y_1|} + \sqrt{|x_2-y_2|} \qquad (\textit{metryka „wklęsła”}),$$

gdzie $x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2)$. Wyznaczyć postać kul otwartych dla tych metryk oraz pokazać, że wprowadzają one na $\mathbb{R}^2$ tę samą rodzinę zbiorów otwartych.

Zad 6. Uzasadnić, że następujące funkcje są metrykami na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$. Są to odpowiednio tzw. *metryka studni* oraz *metryka rzeki*:

$$d_s(x,y) = \begin{cases} d_e(x,y), & \text{gdy } x, y \text{ leżą na tej samej prostej} \\ & \text{przechodzącej przez punkt } (0,0), \\ d_e(x,(0,0)) + d_e(y,(0,0)), & \text{w przeciwnym wypadku,} \end{cases}$$

$$d_r(x,y) = \begin{cases} |x_2-y_2|, & \text{gdy } x_1 = y_1 \\ |x_1-y_1| + |x_2| + |y_2|, & \text{w przeciwnym wypadku,} \end{cases}$$

gdzie $x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2)$ oraz d_e jest metryką euklidesową. Wyznaczyć postać kul otwartych oraz podać interpretacje „topologiczne” dla tych metryk.

Zad 7. Niech d_e będzie metryką euklidesową, a d_d metryką dyskretną na prostej $\mathbb{R}$. Pokazać, że funkcja

$$d_{e\times d}\big((x,y)(u,v)\big) = d_e(x,u) + d_d(y,v)$$

jest metryką na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ oraz wyznaczyć postać kul w tej metryce.

Zad 8. Zbadać zbieżność ciągu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ punktów na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ we wszystkich metrykach z zadań 5, 6 i 7, gdzie

	a_n		a_n		a_n		a_n
a)	$(1, 2-\frac{1}{n})$	c)	$(\frac{(-1)^n}{n}, \frac{3}{n^2})$	e)	$(\frac{1-2n}{n}, \pi)$	g)	$(\frac{2n+1}{n}, \frac{2n+1}{n})$
b)	$(-1,-1)$	d)	$(3+\frac{1}{n}, 2-\frac{1}{2n})$	f)	$(-2, \frac{(1+n)^2}{n^2+2n+1})$	h)	$((1+\frac{1}{n})^n, 0)$

Zad 9. Podać przykład dwu metryk d_1, d_2 określonych w zbiorze X, dla których istnieje ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ zbieżny w metryce d_1 do punktu g_1 oraz zbieżny w metryce d_2 do punktu g_2, gdzie $g_1 \neq g_2$.